

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA TẤM BẰNG VẬT LIỆU RỖNG THEO LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC NHẤT

Lê Thanh Hải^{a,*}, Trần Minh Tú^b, Lê Xuân Huỳnh^b

^aKhoa Xây dựng, Trường Đại học Vinh, 182 đường Lê Duẩn, thành phố Vinh, tỉnh Nghệ An, Việt Nam

^bKhoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 01/10/2018, Sửa xong 29/11/2018, Chấp nhận đăng 30/11/2018

Tóm tắt

Bài báo sử dụng lý thuyết cắt bậc nhất (FSDT) của Reissner-Mindlin để phân tích dao động riêng của tấm chữ nhật làm bằng vật liệu rỗng. Do sự phân bố liên tục và không đều của các lỗ rỗng làm cho mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng của vật liệu biến đổi trơn theo tọa độ chiều dày tấm với hai dạng phân bố (đối xứng và bất đối xứng). Hệ phương trình chuyển động của tấm được thiết lập theo nguyên lý Hamilton. Ảnh hưởng của hệ số mật độ lỗ rỗng, dạng phân bố lỗ rỗng và các tham số kích thước hình học của tấm đến tần số dao động riêng được khảo sát. Độ tin cậy của lời giải được kiểm chứng qua so sánh kết quả số với kết quả đã công bố cho trường hợp tấm bằng vật liệu đẳng hướng.

Từ khóa: dao động riêng; tấm vật liệu rỗng; lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất.

VIBRATION ANALYSIS OF POROUS MATERIAL PLATE USING THE FIRST-ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY

Abstract

In this paper the first-order shear deformation theory (FSDT) is used to analyze the free vibration of the rectangular plate made of porous materials. The elasticity moduli and mass density of porous materials are assumed to be graded in the thickness direction according to two different distribution types (symmetric and un-symmetric). Based on the Hamilton's principle, the equations of motion are derived. The effect of porosity coefficient, varying porosity distributions, and geometrical parameters on natural frequencies are investigated. To verify the reliability of the present solution, the comparisons between the obtained results and those available in the literature are performed for isotropic plate, and very good agreement is observed.

Keywords: vibration analysis; porous material plate; first shear deformation theory.

[https://doi.org/10.31814/stce.nuce2018-12\(7\)-02](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2018-12(7)-02) © 2018 Trường Đại học Xây dựng (NUCE)

1. Giới thiệu

Vật liệu rỗng là loại vật liệu trong đó một thành phần ở dạng rắn, thành phần kia ở dạng lỗ rỗng trong cấu trúc vật liệu. Các lỗ rỗng này phân bố liên tục với một quy luật nhất định nhằm đạt được những tính chất cơ học mong muốn của người thiết kế. Do có trọng lượng nhẹ, các kết cấu bằng vật liệu rỗng được sử dụng trong nhiều lĩnh vực công nghiệp: hàng không, chế tạo ô tô, tàu biển, xây dựng dân dụng, ... Tính chất hấp thụ năng lượng của vật liệu rỗng được sử dụng để giảm ồn, cách âm và chế tạo những cấu kiện chịu được tải trọng động, tải trọng va chạm. Các nghiên cứu về ứng xử cơ học

*Tác giả chính. Địa chỉ e-mail: haidhvinh@gmail.com (Hải, L. T.)

của các kết cấu bằng vật liệu rỗng luôn là đề tài thu hút sự quan tâm của các nhà khoa học trong và ngoài nước thể hiện qua một số lượng lớn các công bố trong thời gian gần đây.

Magnucka-Blandzi [1] tính toán độ võng và lực tối hạn cho tấm tròn bằng vật liệu rỗng liên kết khớp trên chu tuyến chịu tải nén đều trong mặt trung bình và tải trọng uốn đối xứng trục. Mojahedin [2] phân tích ổn định của tấm tròn bằng vật liệu rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Lời giải chính xác cho dao động tự do của tấm dày hình chữ nhật làm bằng vật liệu rỗng ở trạng thái bão hòa nước được trình bày trong [3] dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba và xem xét ảnh hưởng của chất lỏng trong mạng lưới lỗ rỗng của vật liệu, điều kiện biên, ảnh hưởng của chất lỏng, kích thước hình học và mật độ phân bố lỗ rỗng cũng đã được khảo sát. Arani và cộng sự [4] nghiên cứu dao động tự do của tấm chữ nhật trên nền Winkler làm bằng vật liệu rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy, tần số dao động xác định bằng phương pháp DQM (differential quadrature method). Leclair [5] đã phân tích dao động riêng của tấm mỏng chữ nhật làm bằng vật liệu rỗng có dạng bão hòa bởi chất lỏng.

Mục đích của bài báo là thiết lập các hệ thức, các phương trình chủ đạo của tấm vật liệu rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Dạng nghiệm theo Navier được sử dụng nhằm xác định tần số dao động riêng của tấm chữ nhật tựa khớp trên chu vi. Các ví dụ kiểm chứng sẽ được thực hiện qua so sánh với một số kết quả đã có khi đưa bài toán về trường hợp riêng cho vật liệu đẳng hướng. Ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng, kích thước hình học của tấm đến tần số dao động riêng sẽ được khảo sát.

2. Mô hình tấm bằng vật liệu rỗng

Xét tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng là vật liệu đàn hồi tuyến tính, có kích thước các cạnh $a \times b$, chiều dày h . Mặt phẳng trung bình là mặt phẳng Oxy và z là phương chiều dày của tấm (Hình 1). Hệ số Poisson được giả thiết không đổi theo chiều dày tấm. Các hằng số vật liệu còn lại biến thiên liên tục theo tọa độ chiều dày tấm với quy luật hàm cosine đơn giản dạng đối xứng (dạng 1) hoặc bất đối xứng (dạng 2) [6]:

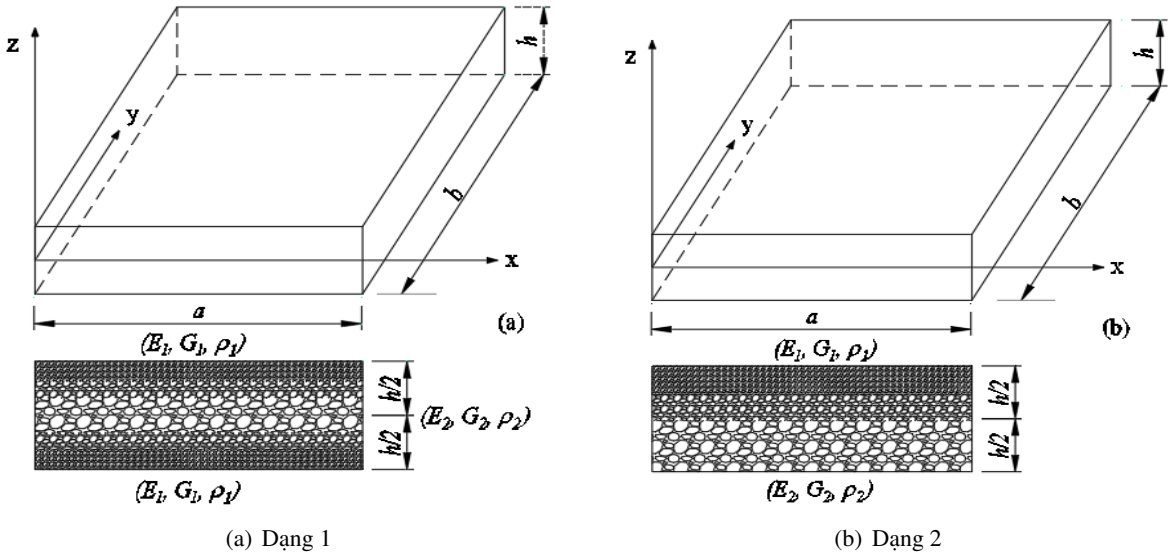
$$\begin{cases} E(z) = E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \\ G(z) = G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \\ \rho(z) = \rho_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} E(z) = E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ G(z) = G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ \rho(z) = \rho_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{cases} \quad (2)$$

trong đó E_1, G_1, ρ_1 lần lượt là các giá trị lớn nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng; E_2, G_2, ρ_2 là các giá trị nhỏ nhất tương ứng. Các hệ số rỗng e_0 cho mô đun đàn hồi và hệ số rỗng e_m cho khối lượng riêng được tính theo [6]:

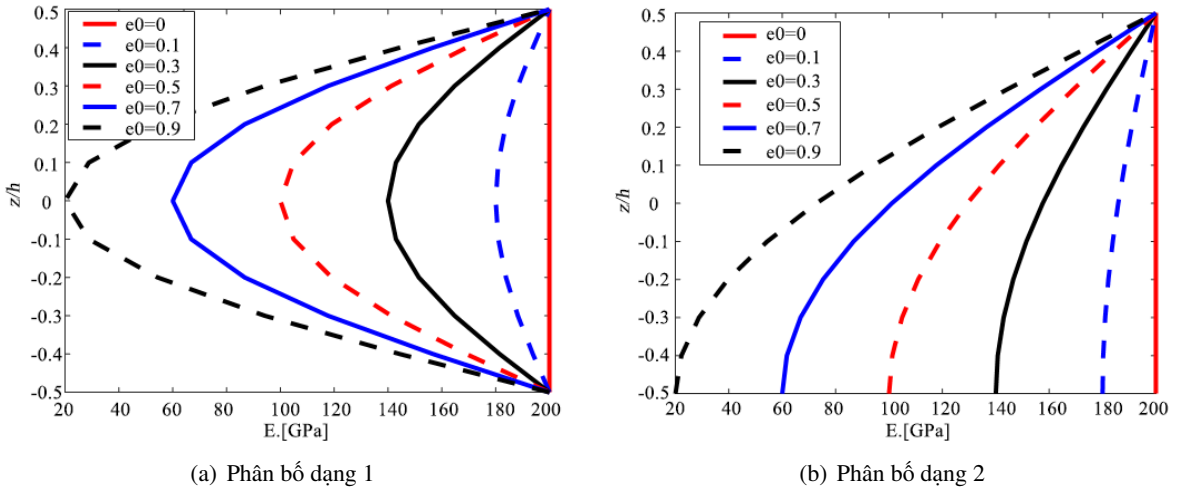
$$e_0 = 1 - \frac{E_1}{E_2} = 1 - \frac{G_1}{G_2} \quad (3)$$

$$e_m = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (4)$$



Hình 1. Tấm bằng vật liệu rỗng với các hàm mật độ phân bố lỗ rỗng khác nhau

Từ Hình 2(a) và biểu thức (1) cho thấy sự phân bố lỗ rỗng theo dạng 1 là đối xứng, giá trị lớn nhất của các hằng số vật liệu đạt được ở mặt trên và mặt dưới của tấm, giá trị nhỏ nhất đạt được tại mặt trung bình nơi có mật độ lỗ rỗng lớn nhất. Trong khi đó phân bố lỗ rỗng theo dạng 2 (Hình 2(b)) và biểu thức (2) là bất đối xứng, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt đạt được tại mặt trên và dưới tương ứng với vị trí có mật độ lỗ rỗng nhỏ nhất và lớn nhất.



Hình 2. Biến thiên của mô đun đàn hồi kéo (nén) trong tấm vật liệu rỗng

3. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất Reissner – Mindlin

3.1. Các thành phần chuyển vị

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất giả thiết dưới dạng [7]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) = w(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

trong đó u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương x, y, z . θ_x, θ_y là các góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh trục y, x .

3.2. Các thành phần biến dạng

Trường biến dạng được suy ra từ trường chuyển vị thông qua các biểu thức quan hệ chuyển vị - biến dạng, biểu diễn dưới dạng:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\}^T + z\{\kappa\}^T \quad (6)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T \\ \{\varepsilon^0\} &= \{\varepsilon^0_{xx}, \varepsilon^0_{yy}, \varepsilon^0_{xy}, \gamma^0_{xz}, \gamma^0_{yz}\}^T = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x, \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \right\}^T \\ \{\kappa\} &= \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, 0, 0\}^T = \left\{ \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, 0, 0 \right\}^T \end{aligned} \quad (7)$$

3.3. Các thành phần ứng suất

Quan hệ tuyến tính giữa ứng suất – biến dạng trong tấm bằng vật liệu rỗng được viết với dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [Q] \{\varepsilon\} \quad (8)$$

trong đó

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} = Q_{22}; \quad Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2} = Q_{21}; \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \quad (9)$$

3.4. Các thành phần nội lực

Các thành phần nội lực trong tấm được xác định theo các biểu thức định nghĩa có dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz; \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (10)$$

với $k = 5/6I$ hệ số hiệu chỉnh cắt.

Quan hệ ứng lực – chuyển vị có thể biểu diễn tổng quát dưới dạng:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & B_{12} & B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 & D_{12} & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \end{pmatrix} \quad (11)$$

trong đó

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz; \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} z dz; \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} z^2 dz; \quad A_{44} = A_{55} = k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} dz \quad (12)$$

4. Hệ phương trình chuyển động theo các thành phần chuyển vị

Sử dụng nguyên lý Hamilton ta nhận được hệ phương trình chuyển động biểu diễn dưới dạng [7]:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \\ \delta w_0 : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ \delta \theta_x : \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\ \delta \theta_y : \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (13)$$

trong đó các thành phần mô men quán tính được tính theo công thức

$$I_0, I_1, I_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2) dz \quad (14)$$

Thay các thành phần ứng lực biểu diễn qua chuyển vị theo (11) vào hệ phương trình (13), ta nhận được hệ phương trình chuyển động theo các thành phần chuyển vị, có dạng:

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \\
 & \quad + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\
 & A_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + \\
 & \quad + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \\
 & A_{44} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + A_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \tag{15} \\
 & B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} - A_{44} \theta_x + \\
 & \quad + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - A_{44} \frac{\partial w_0}{\partial x} = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\
 & B_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} - A_{55} \theta_y + \\
 & \quad + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} - A_{55} \frac{\partial w_0}{\partial y} = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

5. Lời giải Navier cho tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng

Xét tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng có kích thước như Hình 1, liên kết khớp trên chu vi với các điều kiện biên như sau:

$$\begin{aligned}
 x = 0 : u_0 = v_0 = w_0 = 0, M_x = 0; \quad x = a : v_0 = w_0 = 0, M_x = 0 \\
 y = 0 : u_0 = v_0 = w_0 = 0, M_y = 0; \quad y = b : v_0 = w_0 = 0, M_y = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

Hàm chuyển vị cần tìm trong (15) được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép thỏa mãn điều kiện biên (16) có dạng:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} \cos \alpha x \sin \beta y . e^{i\omega_{mn}t} \\
 v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} \sin \alpha x \cos \beta y . e^{i\omega_{mn}t} \\
 w_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} \sin \alpha x \sin \beta y . e^{i\omega_{mn}t} \\
 \theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0xmn} \cos \alpha x \sin \beta y . e^{i\omega_{mn}t} \\
 \theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0ymn} \sin \alpha x \cos \beta y . e^{i\omega_{mn}t}
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} \sin \alpha x \cos \beta y . e^{i\omega_{mn}t}$$

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} \sin \alpha x \sin \beta y . e^{i\omega_{mn}t}$$

$$\theta_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0xmn} \cos \alpha x \sin \beta y . e^{i\omega_{mn}t}$$

$$\theta_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0ymn} \sin \alpha x \cos \beta y . e^{i\omega_{mn}t}$$

trong đó $\alpha = \frac{m\pi}{a}$; $\beta = \frac{n\pi}{b}$; với m, n là số nửa bước sóng hình sin theo phương x, y ; ω_{mn} là tần số dao động riêng (tần số góc) tương ứng với dạng dao động (m, n) .

Thay biểu thức (17) vào hệ phương trình chuyển động theo chuyển vị (15), ta nhận được hệ phương trình viết dưới dạng rút gọn:

$$([S]_{5 \times 5} - \omega^2 [M]_{5 \times 5}) \{q\}_{5 \times 1} = \{0\}_{5 \times 1} \quad (18)$$

trong đó $[S]$ là ma trận các hệ số độ cứng, $[M]$ là ma trận khối lượng.

$$\{q\} = \left\{ u_{0mn} \quad v_{0mn} \quad w_{0mn} \quad \theta_{xmn} \quad \theta_{ymn} \right\}^T \quad (19)$$

Nhờ sự trợ giúp của phần mềm Matlab giải bài toán tìm trị riêng của phương trình $[S] - \omega^2 [M] = 0$ ta tìm được tần số dao động riêng ω_{mn} của tấm bằng vật liệu rỗng.

6. Kết quả số và thảo luận

6.1. Bài toán kiểm chứng

Với nghiệm giải tích đã thiết lập ở phần trên, chương trình tính trên nền Matlab được viết để thực hiện các ví dụ số. Thông số kích thước và các hằng số vật liệu của tấm trong bài toán kiểm chứng cho trong Bảng 1.

Bảng 1. Thông số kích thước và vật liệu tấm cho ví dụ kiểm chứng

h (m)	a/h	b/a	E_1 (Pa)	ν	e_0
0,1	5, 10, 20	1	380×10^9	0,3	0

Tần số dao động cơ bản không thứ nguyên ($m = n = 1$) tính theo: $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$.

Khi cho $e_0 = 0$ ta nhận được tần số dao động riêng không thứ nguyên của tấm vuông bằng vật liệu đẳng hướng, các kết quả này được so sánh với các kết quả của Zhao trong [8] sử dụng phương pháp không lưới Ritz và Thai Huu-Tai [9] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) tính toán cho tấm vuông bằng vật liệu FGM trong trường hợp $p = 0$. Sự tương đồng của các kết quả trong Bảng 2 cho thấy độ tin cậy của nghiệm giải tích và chương trình tính mà bài báo đã xây dựng.

Bảng 2. Tần số dao động cơ bản không thứ nguyên của tấm vuông bằng vật liệu đẳng hướng

Mô hình	(m, n)	Hệ số e_0	Tỷ số a/h		
			5	10	20
HSDT [9]	(1, 1)	0	0,2113	0,0577	0,0148
FSDT [8]			0,2055	0,0568	0,0146
FSDT			0,2112	0,0577	0,0148

6.2. Ảnh hưởng của mật độ phân bố lỗ rỗng và kích thước hình học

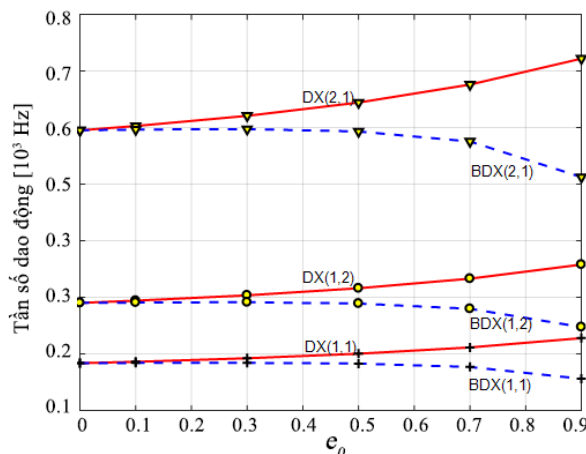
Tấm bằng vật liệu rỗng bốn biên tựa khớp, có chiều dày $h = 0,1$ m, mô đun đàn hồi lớn nhất của vật liệu $E_1 = 380 \times 10^9$ Pa.

a. Ảnh hưởng của mật độ phân bố lỗ rỗng đến tần số dao động riêng ω

Xét tấm chữ nhật có tỷ số $a/h = 10, b/a = 2$. Ba tần số dao động riêng đầu tiên của tấm vật liệu rỗng với hệ số mật độ lỗ rỗng e_0 thay đổi từ 0 đến 0,9 theo hai dạng phân bố đối xứng và bất đối xứng trình bày trong Bảng 3. Đồ thị biểu diễn sự biến thiên của tần số dao động riêng theo e_0 biểu diễn trên Hình 3.

Bảng 3. Ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng đến các tần số dao động riêng $\omega[10^3 \text{ Hz}]$

Dạng phân bố	(m, n)	Hệ số mật độ lỗ rỗng					
		0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
Dạng 1 (ĐX)	(1, 1)	0,1838	0,1863	0,1925	0,2006	0,2117	0,2281
	(1, 2)	0,2904	0,2943	0,3038	0,3162	0,3332	0,3581
	(2, 1)	0,5954	0,6030	0,6210	0,6444	0,6762	0,7221
Dạng 2 (BĐX)	(1, 1)	0,1838	0,1842	0,1845	0,1831	0,1771	0,1563
	(1, 2)	0,2904	0,2910	0,2915	0,2893	0,2800	0,2477
	(2, 1)	0,5954	0,5967	0,5975	0,5933	0,5756	0,5127



Hình 3. Ảnh hưởng của hệ số mật độ lỗ rỗng đến tần số dao động riêng trong trường hợp quy luật phân bố lỗ rỗng dạng 1 (ĐX) và dạng 2 (BĐX)

Từ kết quả trên Bảng 3 và đồ thị trên Hình 3 có thể thấy rằng khi mật độ lỗ rỗng tăng nếu phân bố theo dạng đối xứng thì tần số dao động tăng, tuy nhiên nếu phân bố theo dạng bất đối xứng thì tần số dao động giảm. Đặc biệt sự biến thiên nhanh khi mật độ lỗ rỗng $e_0 \geq 0,5$. Có thể thấy rằng khi hệ số mật độ lỗ rỗng thay đổi ảnh hưởng đến độ cứng của tấm; với phân bố đối xứng độ cứng tăng khi e_0 tăng, với phân bố bất đối xứng thì ngược lại.

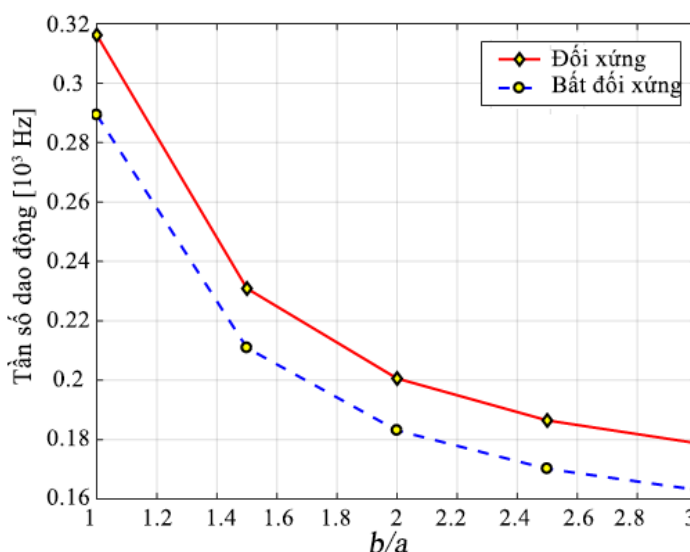
6.3. Ảnh hưởng của tỷ số kích thước các cạnh tấm (b/a), tỷ số kích thước cạnh/chiều dày tấm (a/h) đến tần số dao động riêng

Xét tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng có hệ số mật độ phân bố lỗ rỗng $e_0 = 0,5$.

Tần số dao động riêng cơ bản với tỷ số b/a thay đổi từ 1 đến 3 ($a/h = 10$) trình bày trong Bảng 4. Đồ thị biểu diễn biến thiên của tần số dao động riêng cơ bản theo tỷ số b/a minh họa trên Hình 4.

Bảng 4. Ảnh hưởng của tỷ số b/a đến tần số dao động riêng $\omega[10^3 \text{ Hz}]$

Dạng phân bố ($a/h = 10$)	Tỷ số b/a				
	1	1,5	2	2,5	3
Dạng 1 (ĐX)	0,3162	0,2309	0,2006	0,1865	0,1788
Dạng 2 (BĐX)	0,2893	0,2109	0,1831	0,1702	0,1631



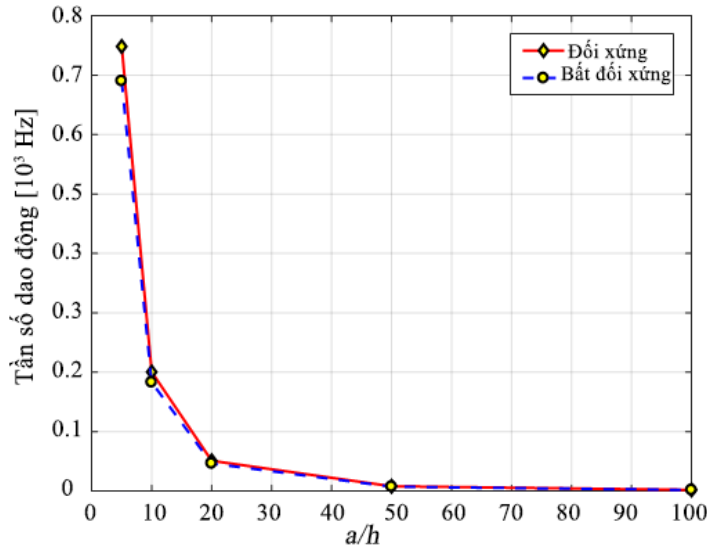
Hình 4. Ảnh hưởng của tỷ số b/a đến tần số dao động cơ bản trong trường hợp quy luật phân bố lỗ rỗng dạng 1 (ĐX) và dạng 2 (BĐX)

Từ Bảng 4 và Hình 4 ta thấy tần số dao động riêng của tấm giảm dần khi tỷ số kích thước tấm b/a tăng lên. Tần số dao động riêng cơ bản với quy luật phân bố lỗ rỗng theo dạng 1 (đối xứng) luôn lớn hơn tần số dao động riêng với quy luật phân bố lỗ rỗng theo dạng 2 (bất đối xứng). Khi chuyển từ tấm vuông sang tấm chữ nhật thì tần số dao động riêng cơ bản sẽ giảm mạnh.

Tần số dao động riêng cơ bản của tấm bằng vật liệu rỗng ($b/a = 2$) với các tỷ số a/h thay đổi từ 5 đến 100 trình bày trong Bảng 5. Đồ thị biểu diễn sự biến thiên của tần số dao động riêng theo tỷ số a/h thể hiện trên Hình 5.

Bảng 5. Ảnh hưởng của kích thước tấm đến tần số dao động riêng ω [10^3 Hz]

Dạng phân bố ($b/a = 2$)	Tỷ số a/h				
	5	10	20	50	100
Dạng 1 (ĐX)	0,7484	0,2006	0,0511	0,0082	0,0021
Dạng 2 (BĐX)	0,6903	0,1831	0,0465	0,0075	0,0019

Hình 5. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tần số dao động cơ bản trong trường hợp quy luật phân bố lỗ rỗng dạng 1 và dạng 2

Trong cả hai trường hợp phân bố tần số dao động riêng giảm dần khi tỷ số kích thước tấm a/h tăng lên (tức khi tấm càng mỏng), giảm mạnh khi a/h thay đổi từ 5 đến 20, sau đó giảm chậm dần. Quy luật phân bố lỗ rỗng theo dạng 1 (đối xứng) luôn cho tần số dao động riêng lớn hơn so với quy luật phân bố theo dạng 2 (bất đối xứng). Tuy nhiên tấm càng mỏng (a/h càng lớn) thì ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng càng giảm.

7. Kết luận

Bài báo phân tích dao động riêng của tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng liên kết khớp trên chu vi theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Quy luật phân bố lỗ rỗng được giả thiết biến thiên theo tọa độ chiều dày tấm với quy luật hàm cosine đơn giản cùng hai dạng phân bố: đối xứng và bất đối xứng. Nghiệm giải tích dạng nghiệm Navier cùng với chương trình tính viết trên nền Matlab đã được xây dựng. Ví dụ kiểm chứng được thực hiện cho thấy độ tin cậy của lời giải. Các khảo sát số cho thấy ảnh hưởng của hệ số mật độ phân bố lỗ rỗng, dạng phân bố lỗ rỗng và các tham số hình học đến tần số dao động riêng của tấm bằng vật liệu rỗng. Các kết quả nhận được là hữu ích cho công tác nghiên cứu, thiết kế các kết cấu tấm làm bằng vật liệu rỗng.

Tài liệu tham khảo

- [1] Magnucka-Blandzi, E. (2008). [Axi-symmetrical deflection and buckling of circular porous-cellular plate](#). *Thin-Walled Structures*, 46(3):333–337.
- [2] Mojahedin, A., Jabbari, M., Khorshidvand, A. R., Eslami, M. R. (2016). [Buckling analysis of functionally graded circular plates made of saturated porous materials based on higher order shear deformation theory](#). *Thin-Walled Structures*, 99:83–90.
- [3] Rezaei, A. S., Saidi, A. R. (2015). [Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of porous materials](#). *Composite Structures*, 134:1051–1060.
- [4] Arani, A. G., Khoddami Maraghi, Z., Khani, M., Alinaghian, I. (2017). [Free vibration of embedded porous plate using third-order shear deformation and poroelasticity theories](#). *Journal of Engineering*, 2017.
- [5] Leclaire, P., Horoshenkov, K., Cummings, A. (2001). [Transverse vibrations of a thin rectangular porous plate saturated by a fluid](#). *Journal of Sound and Vibration*, 247(1):1–18.
- [6] Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S. (2016). [Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 108:14–22.
- [7] Reddy, J. N. (2007). *Theory and analysis of elastic plates and shells*. Second edition, CRC Press.
- [8] Zhao, X., Lee, Y. Y., Liew, K. M. (2009). [Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method](#). *Journal of Sound and Vibration*, 319(3-5):918–939.
- [9] Thai, H.-T., Kim, S.-E. (2013). [A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates](#). *Composite Structures*, 96:165–173.